Les Francs Bourgeois - La Salle
Frères des Écoles Chrétiennes

DST 1 de :	SPECIALITE MATHEMATIQUES		
Date du DST :	Jeudi 16 novembre 2023	Durée de l'épreuve :	2 heures
Nom du professeur :	Mme FAHLAOUI	Groupe :	1SPE MATHS4
Matériel autorisé :	• L'usage de la calculatrice graphique avec **MODE EXAMEN ACTIF** est autorisé pour cette épreuve. • L'usage de la calculatrice sans mémoire « type **collège** » est autorisé pour cette épreuve.		
Consignes particulières :	• Ne pas rendre le sujet (pages 1 & 2). • Compléter la page 3 et la rendre avec la copie.		

Exercice 1

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- A l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré. On affichera également les probabilités associées sur chaque branche.
2. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
3. Calculer la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine.
4. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Exercice 2

Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Exercice 3
QCM : Voir l'annexe à rendre page 3 (à compléter sans justifier).

Exercice 4
On considère la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - ax + 3$, avec a un nombre réel.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $h(x)$ admet deux racines distinctes.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $h(x)$ admet une racine double.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $h(x)$ n'admet pas de racine.

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$$

Exercice 6
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a,\ b$ et c des réels et $a \neq 0$).
Les points $A(0\ ;\ 3),\ B(\ 1;\ 5),\ C(2\ ;15)$ appartient à la parabole P représentant f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la valeur de c.
2. Montrer que a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 12 \end{cases}$$

3. Résoudre le système et en déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 7
On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante pour tout $n \in /N$:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n$

Exercice 8
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

1. Déterminer à partir de quel entier n la suite est définie.
2. Calculer les 3 premiers termes.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 9
Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel $n > 0$, par $u_n = \dfrac{5^n}{n}$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

NOM Prénom : **Note : /20**

Barème :

Exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Soin
Total	6	4	6	3	4	4	4	4	3	2

Annexe de l'exercice 3

QCM : entourer les bonnes réponses aux questions suivantes.

Plusieurs réponses par question sont possibles. Si deux réponses sont correctes pour une question et que vous n'en trouvez qu'une seule, aucun point n'est attribué.

Une réponse fausse ne donne ni n'enlève de point.

1. Dans la forme canonique $p_1(x) = 4(x+3)^2 + 1$ de la fonction polynôme p_1 du second degré définie sur $\mathbb{R}$, on a :

   A. $\alpha = -3$ et $\beta = -1$ **B.** $\alpha = -3$ et $\beta = 1$ **C.** $\alpha = 3$ et $\beta = -1$ **D.** $\alpha = 3$ et $\beta = 1$

2. La fonction p_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $p_2(x) = 2x^2 + 12x + 25$ est une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est :

   A. $2(x-3)^2 - 43$ **B.** $2(x-3)^2 + 7$ **C.** $2(x+3)^2 + 7$ **D.** $2(x+3)^2 + 79$

3. Ce tableau de variations peut être associé à la fonction :

x	-4		-1		3
variations de f	-27	$\nearrow$	9	$\searrow$	-55

A. $f : x \longmapsto -4(x-9)^2 - 1$ **B.** $f : x \longmapsto 4(x+1)^2 + 9$ **C.** $f : x \longmapsto -4(x+1)^2 + 9$ **D.** $f : x \longmapsto 3(x+1)^2 + 9$

4. La fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ a :

   A. une racine égale à 2 **B.** une racine égale à -1

   C. des racines dont le produit est égal à 6 **D.** des racines dont la somme est égale à $\frac{7}{2}$

5. Le tableau de signes suivant peut être associé à la fonction :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$+$	

   A. $x \longmapsto -4x^2 + 4x - 1$ **B.** $x \longmapsto 4x^2 - 4x + 1$ **C.** $x \longmapsto -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ **D.** $x \longmapsto 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

6. Le tableau de signes suivant peut être associé à la fonction :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe		‘$-$	0	$+$	0	$-$	

   A. $x \longmapsto (x+1)(2-x)$ **B.** $x \longmapsto x^2 - x - 2$ **C.** $x \longmapsto -x^2 + x + 2$ **D.** $x \longmapsto x^2 - 3x + 2$